TD n°6: Retour sur les résidus et théorème de Rouché

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1,2,3,7,8,9,4,10. Les exercices marqués d'un [1]sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Retour sur le théorème des résidus

Exercice 1. Une intégrale pour commencer.

1. Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé. Démontrer (à l'aide du théorème des résidus, de la formule de Cauchy, ...) que
$$\int_0^{2\pi} e^{f(e^{i\theta})} d\theta = 2\pi e^{f(0)}.$$

2. En utilisant cette formule, démontrer que pour $a \in \mathbb{R}$:
$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos(\theta)} \cos(a\sin(\theta)) d\theta = 2\pi.$$

Exercice 2. Une dernière intégrale.
En intégrant $z \mapsto \frac{(\log(-z)+i\pi)^3}{1+z^2}$ sur un contour en trou de serrure, calculer
$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)^2}{1+x^2} dx.$$

Indication : on pourra vérifier à l'aide d'un changement de variable que $\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2} dx = 0$.

Exercice 3. Les valeurs de ζ aux entiers pairs.
On considère la fonction méromorphe
$$f(z) = \frac{2i\pi}{z^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

Pour $\Re(s) > 1$, on pose
$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Démontrer que $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière au voisinage de 0, et que les coefficients du développement sont rationnels. On appelle ces coefficients renormalisés par $n!$ les nombres de Bernoulli, et on note
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

2. Démontrer que f a un pôle simple en chaque entier non-nul et calculer le résidu.

3. Démontrer que f a un pôle d'ordre $2k+1$ en 0, de résidu $\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$.

4. En intégrant f sur le carré C_N de coins $\pm(N+1/2) \pm (N+1/2)i$, démontrer que
$$\zeta(2k) = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 4. Une somme de cotangentes hyperboliques.
On pose, pour $k \geqslant 0$ entier :

$$S_k = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}}, \; T_k = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{4k+3}(e^{2\pi n} - 1)}.$$

1. Démontrer que $S_k = 2T_k + \zeta(4k+3)$.
2. Démontrer qu'au voisinage de 0, on a

$$z \coth(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

3. On pose $f(z) = \frac{\cot(\pi z)\coth(\pi z)}{z^{4k+3}}$. Déterminer ses pôles, leurs ordres et leurs résidus.
4. Démontrer, grâce à une méthode similaire à l'exercice précédent, la formule

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{2k+2} (-1)^{m+1} \zeta(2m)\zeta(4k+4-2m)$$

   où on normalise $\zeta(0) = -\frac{B_0}{2} = -\frac{1}{2}$. En déduire la valeur de T_k. On obtient donc une formule de la forme $\zeta(4k+3) = c_k \pi^{4k+3} + 2T_{4k+3}$, avec c_k un nombre rationnel explicite : à condition de savoir calculer π, c'est une série qui converge beaucoup plus vite !

Exercice 5. Sommes de fractions rationnelles.

1. Soit $f(z) = P(z)/Q(z)$ une fonction rationnelle vérifiant $\deg(P) + 2 \leq \deg(Q)$. Démontrer l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} = -2i\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n)=0} \mathrm{Res}_n \left(f(z) \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right) - 2i\pi \sum_{\alpha \notin \mathbb{Z}, Q(\alpha)=0} \mathrm{Res}_\alpha \left(f(z) \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right).$$

2. Supposons de plus que f est paire, n'a pas de pôles dans $\mathbb{Z}_{\neq 0}$, et a un pôle d'ordre $2k$ (éventuellement $k = 0$) en 0. On suppose de plus que tous les pôles de la fonction, hors 0, sont simples. Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{P(n)}{Q(n)} = \sum_{k=0}^{m} c_{2k} \zeta(2m - 2k) - i\pi \sum_{Q(\alpha)=0} \frac{1}{e^{2i\pi\alpha} - 1} \cdot \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

   où $P(z)/Q(z) = z^{-2k} \sum_{m \geqslant 0} c_{2m} z^{2m}$ et on normalise encore $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 6. Séries de Fourier de formes modulaires
On définit, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}.$$

On considère, pour $\Im(w) > 0$, la fonction méromorphe

$$f_w(z) = \frac{2i\pi}{(z-w)^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

1. Déterminer les résidus de f_w en chaque $m \in \mathbb{Z}$.
2. Démontrer que le résidu de f_w en w est donné par

$$\mathrm{Res}_w(f_w) = -\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d \geqslant 1} d^{2k-1} e^{2i\pi d w}.$$

3. En intégrant f_w sur le carré de coins $\pm(2N+1)\pi \pm (2N+1)i\pi$, démontrer que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m-w)^{2k}} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d\geqslant 1} d^{2k-1} e^{2i\pi d w}$$

On note $\sigma_k(r) := \sum_{d|r} d^k$.

4. Démontrer, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$\sum_{n\neq 0, m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} = 2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r\geqslant 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$.

5. En utilisant le résultat de l'exercice 3, démontrer que

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k)\left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{r\geqslant 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r\right).$$

6. Démontrer que $G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{2k} G_{2k}(\tau)$, et en déduire que $G_{4k+2}(i) = 0$.

7. Démontrer que

$$\sum_{r\geqslant 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2k-1} q^n}{1-q^n}$$

et en déduire que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{4k+1}}{e^{2\pi n}-1} = \frac{B_{4k+2}}{8k+4}.$$

Principe de l'argument et théorème de Rouché

Exercice 7. Quelques applications du théorème de Rouché.

1. Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss en utilisant uniquement le théorème de Rouché.
2. En appliquant le théorème de Rouché à $z\sin(z)$ et $z\sin(z)-1$, démontrer que toutes les solutions de $z\sin(z) = 1$ sont réelles.

Exercice 8. Un théorème de Hurwitz.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe f. Soit $a \in U$ un zéro d'ordre m de f. Démontrer que si $r > 0$ est tel que $\mathbb{D}(a,r) \subseteq U$ et que a est le seul zéro de f dans le disque, alors pour tout n assez grand, f_n possède m zéros (avec multiplicités) dans $\mathbb{D}(a,r)$. En particulier, tout zéro de f est une limite de zéros des f_n.

Exercice 9. Injectivité de fonctions holomorphes.
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{D}$, injective sur $\partial\mathbb{D}$.

1. (a) En utilisant le fait que f est ouverte, démontrer que $\partial f(\mathbb{D}) \subseteq f(\partial\mathbb{D})$.
   (b) On admet que le seul fermé d'une courbe simple qui sépare $\mathbb{C}$ en deux composantes connexes est la courbe simple elle-même. Démontrer que $\partial f(\mathbb{D}) = f(\partial\mathbb{D})$.
2. On considère le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ donné par $\gamma(\theta) = f(e^{i\theta})$. Démontrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w}$$

vaut $2i\pi$ si $w \in f(\mathbb{D})$ et 0 sinon.

3. A l'aide du principe de l'argument, démontrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.

Exercice 10. Principe de l'argument généralisé et inversion locale.
Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $f \in \mathcal{M}(U)$ et $g \in \mathcal{O}(U)$ qui ne s'annule pas aux zéros et pôles de f.

1. Démontrer le principe de l'argument généralisé : si γ est un lacet simple orienté dans le sens direct, alors

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2i\pi \sum_{f(\alpha)=0} v_\alpha(f)g(\alpha)$$

   où la somme porte sur les zéros de f à l'intérieur de γ et $v_\alpha(f)$ est l'ordre d'annulation de f en α (négatif si α est un pôle).

2. On suppose à présent f holomorphe. Soit $a \in U$ tel que $f'(a) \neq 0$: justifier qu'il existe un disque ouvert $a \in D \subseteq U$ sur lequel f est injective et démontrer que la formule

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$$

   définit une fonction holomorphe sur $f(D)$.

3. Démontrer que cette fonction est une réciproque holomorphe à $f|_D$. On a prouvé le théorème d'inversion locale en version holomorphe, à savoir qu'une fonction holomorphe de dérivée non-nulle admet localement un inverse holomorphe.

4. Redémontrer ce théorème à partir du théorème d'inversion locale C^1.